ショットキイ群の極限集合のハウスドルフ次元 (双曲空間及び離散群の研究)

吉田, 直司

数理解析研究所講究録 1223 巻 2001 年 33-36

ショットキイ群の極限集合のハウスドルフ次元

静岡大学大学院理工学研究科　吉田直司

Graduate School of Science and Engineering Shizuoka University　Naoshi Yoshida

1　序

クライン群の極限集合のハウスドルフ次元に関する結果は，しばしば臨界指数 (ポアンカレ級数の収束指数) に関する結果の読み替えとして得られている．実際，幾何学的有限な非初等的クライン群 (例えばショットキイ群) の場合，臨界指数は極限集合のハウスドルフ次元と一致する [7, Theorem 1]．従って，ここでは極限集合のハウスドルフ次元の代わりに臨界指数を扱う．

クライン群 G の臨界指数 $\delta(G)$ は，

$$\delta(G)=\inf\left\{\alpha\geq 0\,\middle|\,\sum_{g\in G}\exp(-\alpha\rho(\boldsymbol{o},g(\boldsymbol{o})))<+\infty\right\}$$

で定義される．但し，$\boldsymbol{o}=(0,0,0)$ で，ρ は $B^3=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,\|\boldsymbol{x}\|<1\}$ の双曲距離であり，一次分数変換を通常の方法により (B^3,ρ) の向きを保つ等長変換と見なしている．

r を 2 以上の整数とする．$\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})^r$ 内の点列 $\{(f_{1n},\cdots,f_{rn})\}_{n=1}^{+\infty}$ で，

(i) 各 n に対して，$\langle f_{1n},\cdots,f_{rn}\rangle$ は階数 r のショットキイ群である．
(ii) $\langle \lim_{n\to+\infty} f_{1n},\cdots,\lim_{n\to+\infty} f_{rn}\rangle$ は幾何学的有限でない階数 r の自由クライン群である．

を満たすものが存在する ([9, 定理 4.18] 参照)．(ii) より，

$$\delta(\langle f_{1n},\cdots,f_{rn}\rangle)\to 2\quad(n\to+\infty)$$

となる ([3, Theorem 6.2] 参照)．一方，2 未満の整数 c で任意の古典的ショットキイ群の臨界指数が c 未満となるものが存在する [4]．従って，任意の $\varepsilon>0$ に対して臨界指数が $2-\varepsilon$ 以上である階数 r の古典的でないショットキイ群が存在する．

そこで，古典的でないショットキイ群の範囲で臨界指数をどれ位小さく出来るか，という疑問が生じる．これについて，ささやかながら次の結果を得た．

> r を 2 以上の整数とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，臨界指数が (1 より大きく)$1+\varepsilon$ 未満である階数 r の古典的でないショットキイ群が存在する．

2 ショットキイ群

ここで，ショットキイ群の定義を思い起こす．

rを2以上の整数とする．$\mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$の部分群$G$が次の(1)，(2)を満たす$\hat{\mathbb{C}}$上の$2r$個の単純閉曲線

$$C_1,\ C_{-1}, \cdots, C_r,\ C_{-r}$$

を持つ時，Gは階数rのショットキイ群であるという．

(1) $\hat{\mathbb{C}}$上の$2r$重連結領域Rで，$\partial R = C_1 \cup C_{-1} \cup \cdots \cup C_r \cup C_{-r}$となるものが存在する．
(2) r個の一次分数変換$h_1, \cdots, h_r$で，次の(a)，(b)，(c)を満たすものが存在する：
 (a) $G = \langle h_1, \cdots, h_r \rangle$.
 (b) 各$i \in \{1, \cdots, r\}$に対して，$h_i(C_i) = C_{-i}$.
 (c) 各$i \in \{1, \cdots, r\}$に対して，$h_i(R) \cap R = \emptyset$.

特に，$C_1,\ C_{-1}, \cdots, C_r,\ C_{-r}$として円周がとれる時，$G$は古典的であるという．

階数rのショットキイ群は純斜航的な階数rの自由第二種クライン群であることが(比較的)容易に示されるが，逆に純斜航的な階数$r(\geq 2)$の自由第二種クライン群は階数rのショットキイ群であることが知られている[5].

3 結果の証明

各$k \in \{1, \cdots, r-1\}$に対して$f_k \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$を，

$$f_k(z) = \frac{18rkz + 9k^2 - 1}{36r^2 z + 18rk}$$

で定義する．$\langle f_1, \cdots, f_{r-1} \rangle$は，

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left| z \pm \frac{k}{2r} \right| > \frac{1}{6r}\ (k = 1, \cdots, r-1) \right\} \cup \left\{ \infty \right\}$$

を一つの基本領域とする純斜航的な階数$(r-1)$の自由第二種クライン群である．

複素数ζに対して，$\varphi_\zeta \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$を

$$\varphi_\zeta(z) = z + \zeta$$

で定義する．

$$F = \left\{ x + y\sqrt{-1} \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},\ -\infty < y < +\infty \right\}$$

は$\langle \varphi_1 \rangle$の一つの基本領域であることと，

$$D \cup F = \hat{\mathbb{C}}, \quad D \cap F \neq \emptyset, \quad \partial D \cap \partial F = \emptyset$$

であることを注意しておく．

正の整数 n, j に対して $g_{nj} \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}})$ を，

$$g_{nj}(z) = \exp\left(\frac{2\pi}{n - j\sqrt{-1}}\right) z + 1$$

で定義する．リーマン面として，

$$(\mathbb{C} - \{p_{nj}\})/\langle g_{nj}\rangle \cong \mathbb{C}/\langle \varphi_1, \varphi_{n\sqrt{-1}}\rangle$$

(p_{nj} は g_{nj} の ∞ でない固定点) であること，

$$g_{nj} \to \varphi_1 \quad (n - j\sqrt{-1} \to \infty)$$

であることから，n が十分大きければ各 j に対して $\langle g_{nj}\rangle$ の基本領域 F_{nj} で，

$$\text{(i)}\, D \cup F_{nj} = \hat{\mathbb{C}}, \quad \text{(ii)}\, D \cap F_{nj} \neq \emptyset, \quad \text{(iii)}\, \partial D \cap \partial F_{nj} = \emptyset$$

となるものの存在が示される．n が十分大きければ各 j に対して，$\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{nj}\rangle$ が階数 r の自由第二種クライン群であることが (i), (ii) より分り，更に放物型元を含まないことが (iii) より分り，従って純斜航的な階数 r の自由第二種クライン群，即ち階数 r のショットキイ群であることが分る．

$$\delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, \varphi_1, \varphi_{n\sqrt{-1}}\rangle) > 1$$

であり ([1, THEOREM 7] 参照)，

$$\liminf_{j\to+\infty} \delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{nj}\rangle) \geq \delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, \varphi_1, \varphi_{n\sqrt{-1}}\rangle)$$

である ([10, 補題 21] 参照) から，十分大きい n に対して整数 $j(n)$ で，

$$\delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{nj(n)}\rangle) > 1$$

となるものが存在する．十分大きい n に対して，

$$\lambda_n = \exp\left(\frac{2\pi}{n - j(n)\sqrt{-1}}\right)$$

とおく．$\lambda_n \to 1$ $(n \to +\infty)$ である事を注意しておく．

$$(f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{nj}) \to (f_1, \cdots, f_{r-1}, \varphi_1) \quad (n \to +\infty)$$

だが，第二種フックス群 $\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, \varphi_1\rangle$ の臨界指数は 1 未満であり ([2, Theorem 2] 参照)，

$$\liminf_{n\to+\infty} \delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{nj(n)}\rangle) \neq \delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, \varphi_1\rangle)$$

となる．よって，

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \frac{|\arg\lambda_n|}{\log|\lambda_n|} = +\infty \quad (-\pi < \arg\lambda_n \leq \pi)$$

となり ([6, Theorem 7.3] 参照)，従ってショットキイ群の列 $\{\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{n\,j(n)}\rangle\}_{n=1}^{+\infty}$ は古典的でないショットキイ群からなる無限部分列を持つ ([8] 参照)．一方，

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\arg\lambda_n|^2}{\log|\lambda_n|} = 0 \quad (-\pi < \arg\lambda_n \leq \pi)$$

ではあるから，$\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, \varphi_1\rangle$ 内の全ての放物型元は φ_1 か $\varphi_1{}^{-1}$ と $\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, \varphi_1\rangle$ 内で共役であることと，十分大きい n に対して $\delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{n\,j(n)}\rangle) > 1$ であることより，

$$\lim_{n\to+\infty} \delta(\langle f_1, \cdots, f_{r-1}, g_{n\,j(n)}\rangle) = 1$$

を得る ([6, Theorem 7.2] 参照)．こうして求める結果を得る．

参考文献

[1] A. F. Beardon, *The exponent of convergence of Poincaré series*, Proc. London Math. Soc. **18** (1968), 461–483.

[2] A. F. Beardon, *Inequalities for certain Fuchsian groups*, Acta Math. **127** (1971), 221–258.

[3] C. J. Bishop and P. W. Jones, *Hausdorff dimension and Kleinian groups*, Acta Math. **179** (1997), 1–39.

[4] P. G. Doyl, *On the bass note of a Schottky group*, Acta Math. **160** (1988), 249–284.

[5] B. Maskit, *A characterization of Schottky groups*, J. Analyse Math. **19** (1967), 227–230.

[6] C. T. McMullen, *Hausdorff dimension and conformal dynamics* I: *Strong convergence of Kleinian groups*, J. Differential Geom. **51** (1999), 471–515.

[7] D. Sullivan, *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*, Acta Math. **153** (1984), 259–277.

[8] N. Yoshida, *A sequence in the classical Schottky space*, to appear in Osaka J. Math.

[9] 谷口雅彦・松崎克彦, 双曲的多様体とクライン群, 日本評論社, 1993.

[10] 松崎克彦, クライン群の力学系—極限集合のハウスドルフ次元—, 数学 **51** (1999), 142–160.